Ministère de l'Education Nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Institut National Polytechnique de Lorraine
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE GEOLOGIE - NANCY

EPREUVE DE MATHEMATIQUES - SESSION 1997

Durée : 4 heures - Coefficient 5

L'épreuve comporte trois problèmes indépendants qui seront également notés. Le problème n° 1 contrôle les connaissances d'Algèbre Linéaire, le problème n° 2 les techniques de calcul analytique, tandis que le problème n° 3 est là pour s'assurer de l'acquisition des notions de base de Probabilité : la rédaction de ce dernier problème devra être particulièrement soignée. La qualité de la rédaction et le soin seront appréciés. On conseille aux candidats de revenir sur la dernière question de chaque problème à la fin de l'épreuve.

Problème n° 1

On désigne par u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par la matrice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

lorsque $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique (au départ et à l'arrivée).

[1] Caractériser le noyau et l'image de u (: en donnant une base de chacun de ces sous espaces vectoriels).

2 La matrice A est-elle diagonalisable ? (: on justifiera la réponse !).

3 Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle u est représentée par la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4 Résoudre l'équation récurrente

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}(-x_n+y_n+z_n) \\ y_{n+1} = z_n \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n-y_n+z_n) \end{cases}$$

avec la donnée initiale

$$x_0 = y_0 = z_0 = 1.$$

5 Etant donnée une matrice Y (: carrée de dimension 3), montrer que l'équation matricielle

$$X.B-B.X = Y$$

possède une solution si et seulement si la trace des matrices B^jY est nulle pour $j = 0,1,2$. Donner alors la forme de la solution générale de l'équation. (On rappelle que la trace d'une matrice carrée est définie comme la somme de ses éléments diagonaux).

Problème n° 2

On considère l'équation différentielle

(E) $(x^2-1).y''+3x.y'+y = 0.$

1 Montrer que si $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n$ est une solution série entière de rayon de convergence positif, il existe entre les coefficients a_n et a_{n+2} une relation à expliciter.

2 Donner la solution y_1 de (E) qui satisfait la condition initiale : $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$ (: on utilisera la formule du binôme pour identifier la somme de la série entière).

3 Donner la solution y_2 de (E) qui satisfait la condition initiale : $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$ sous la forme d'une série entière (dont on précisera le rayon de convergence).

4 Si y est solution de (E), à quelle équation différentielle obéit la fonction $z(x) = \sqrt{1-x^2}.y(x)$? Intégrer cette nouvelle équation différentielle et en déduire la forme de la solution générale de (E).

5 Déduire de ce qui précède la relation suivante

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.4...2n}{3.5...(2n+1)} x^{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} . \text{Arcsin } x$$

valable pour x compris entre -1 et 1.

6 On désigne par X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+2)!} .$$

Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$.

Problème n° 3

Une urne contient n boules noires et 2 boules blanches B1 et B2. On tire les boules les unes après les autres au hasard sans remise. On désigne par N1 le rang de la première boule blanche tirée, par N2 celui de la seconde boule blanche. On désigne par R1 le rang de la boule B1, par R2 celui de B2.

1 Proposer une modélisation des expériences (c'est-à-dire un univers fini Ω et une probabilité $\mathbb{P}$ qui rende compte des expériences).

2 Exprimer N1 et N2 en fonction de R1 et R2.

3 Montrer que R1 et R2 ont même loi, et déterminer cette loi.

4 Déterminer la loi du couple (R1,R2), puis celle du couple (N1,N2).

5 Déterminer la loi de N1 et calculer l'espérance de N1.

6 Calculer l'espérance de N2.

7 Quelle serait la loi de N1 si le tirage avait lieu avec remise ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail